ÉCOLE NAVALE

Concours 1983

Première composition de mathématiques

1° Soit E un espace affine euclidien réel de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A tout point M de E, de coordonnées (x, y, z), on fait correspondre le polynôme $P(t) = t^3 - 3xt^2 + 3yt - z$.

a) On suppose que le polynôme $P(t)$ admet 3 racines réelles, distinctes et strictement positives. On les notera dans toute la suite u, v, w, avec $w < v < u$. Montrer que le polynôme dérivé $P'(t)$ a deux racines réelles distinctes, t_1 et t_2, telles que $P(t_1) . P(t_2) < 0$.

b) Montrer que le produit $P(t_1) . P(t_2)$ peut s'exprimer comme polynôme des trois variables x, y, z, et calculer ce polynôme $Q(x, y, z)$.

c) En déduire que pour que $P(t)$ admette trois racines réelles, distinctes et strictement positives, il faut et il suffit que le point M appartienne à un sous-ensemble Ω de E, qu'on caractérisera au moyen de cinq inégalités portant sur les seules variables x, y et z.

d) Soit alors N le point de coordonnées (u, v, w), et Φ l'application de Ω dans E qui à tout point M de Ω fait correspondre le point $N : \Phi(M) = N$. Préciser l'image Ω_1 de Ω par Φ. L'application Φ est-elle une bijection de Ω sur Ω_1 ? Soit Φ^{-1} l'application réciproque de Φ. Est-elle continue ? Les ensembles Ω et Ω_1 sont-ils des ouverts de E ?

2° :

a) L'application Φ^{-1} est-elle différentiable en tout point de Ω_1 ? Déterminer sa matrice jacobienne $J(u, v, w)$.

b) Calculer le déterminant Δ de la matrice $J(u, v, w)$. Peut-il être nul ?

c) L'application Φ est-elle différentiable en tout point de Ω ? est-elle continue ? Calculer la jacobienne de Φ en fonction des variables u, v, w.

3° Soit α un réel quelconque, et f l'application de Ω_1 dans $\mathbb{R}$ qui, au point $N(u, v, w)$ fait correspondre le nombre $u^\alpha + v^\alpha + w^\alpha$.

a) f est-elle définie sur Ω_1 ? Soit F l'application composée : $F = f \circ \Phi$. Est-elle différentiable sur Ω ?

b) F est une fonction des trois variables x, y, z. On la note encore $F(x, y, z) = u^\alpha + v^\alpha + w^\alpha$. Calculer ses dérivées partielles, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, en fonction de u, v, w.

c) En déduire que quelque soit le point M dans Ω, on a la relation (R) :

$$x . \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + 2y . \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + 3z . \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \alpha F(x, y, z)$$

d) Si α est un entier positif, soit : $\alpha = n$, montrer que $F(x, y, z)$ est un polynôme des trois variables x, y, z. Soit $F_n(x, y, z)$ ce polynôme. Donner F_1, F_2, F_3, et plus généralement une relation de récurrence permettant de calculer $F_n(x, y, z)$ au moyen des polynômes F_{n-1}, F_{n-2} et F_{n-3}.

e) Réciproquement, quels sont tous les polynômes des variables x, y, z qui vérifient la relation (R) lorsque α est un entier : $\alpha = n$? Montrer que l'ensemble de ces polynômes constitue un espace vectoriel réel ; soit V_n cet espace vectoriel.

4° :

a) Décomposer en éléments simples sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

b) Chacun de ces éléments simples admet un développement en série entière ; les calculer, en préciser le rayon de convergence. En déduire un développement en série entière de la fonction $R(x)$, en mettant les coefficients sous forme réelle. Quel en est le rayon de convergence ?

c) En considérant le produit des développements en série entière de :

$$\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-x^2} \text{ et } \frac{1}{1-x^3}$$

et en y cherchant le coefficient de x^n, en déduire la dimension de l'espace vectoriel V_n.

Vérifier la formule trouvée lorsque $n = 1$, 2 ou 3.

FIN